

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тамбовский государственный университет имени Г.Р.Державина»
Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института математики,
физики и информационных
технологий

Якунина И.Н.

«19» января 2021 г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине ФДТ.1

«Выпуклый анализ в задачах оптимизации»

Направление подготовки:

01.06.01 - Математика и механика

Направленность (профиль)

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Уровень высшего образования

подготовка кадров высшей квалификации
по программам подготовки
научно-педагогических кадров в аспирантуре

Форма обучения

очная, заочная

Год набора

2020

Тамбов, 2021

Автор программы:

Доктор физико-математических наук, профессор Жуковский Е.С.

Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень - подготовка кадров высшей квалификации) (приказ Минобрнауки РФ от 30.07.2014 г. № 866).

Рабочая программа принята на заседании кафедры функционального анализа «11» января 2021 года, протокол № 5.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОП аспирантуры
3. Объем и содержание дисциплины
4. Контроль знаний обучающихся
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
6. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Цели и задачи дисциплины

1.1 Цель дисциплины - формирование компетенций в области самостоятельного осуществления научно-исследовательской деятельности в фундаментальной и прикладной математике; формирование у аспиранта целостного представления о математических методах исследования теоретических и прикладных задач; формирование навыков исследования задач выпуклого анализа, экстремальных задач; формирование умений и навыков применения математических методов в прикладных задачах.

1.2 Виды и задачи профессиональной деятельности по дисциплине:

Научно-исследовательская деятельность в области фундаментальной и прикладной математики, механики, естественных наук:

- освоение основных методов научных исследований;
- освоение новых теорий и применение к построению математических моделей;
- участие в проведении математических исследований по заданной тематике;
- участие в обработке полученных результатов научных исследований на современном уровне;
- работа с научной литературой с использованием новых информационных технологий;
- знакомство с основами организации и планирования научных исследований;
- участие в информационной и технической организации научных семинаров и конференций;
- участие в написании и оформлении научных статей и отчетов.

Преподавательская деятельность в области математики, механики, информатики:

- подготовка и проведение учебных занятий в учебном заведении высшего профессионального образования.

1.3 В результате освоения дисциплины у обучающихся должны быть сформированы следующие компетенции:

Код и наименование компетенции ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения по дисциплине, необходимые для формирования компетенции
ПК-1 Готовность использовать современные математические методы исследования дифференциальных уравнений и включений, динамических систем, задач оптимального управления	Знает и понимает: <ul style="list-style-type: none"> – современное состояние и тенденции развития теории дифференциальных уравнений и включений, динамических системы и оптимального управления Код 31(ПК-1) – основные принципы исследования дифференциальных уравнений и включений, динамических систем и задач оптимального управления Код 32(ПК-1)
	Умеет (способен продемонстрировать): <ul style="list-style-type: none"> – применять современные методы решения и исследования дифференциальных уравнений и включений, динамических систем и задач оптимального управления Код У1(ПК-1)
	Владеет: <ul style="list-style-type: none"> – навыками выбора и использования эффективных методов решения задач различной сложности в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального

	управления Код В2(ПК-1)
ПК-3 Способность ориентироваться в смежных разделах науки, в разнообразии методологических подходов к решению профессиональных задач	Знает и понимает: <ul style="list-style-type: none"> – основные разделы смежных дисциплин, в частности многозначного и выпуклого анализа, теории функционально-дифференциальных уравнений и включений, функционального анализа Код 31(ПК-3) – различные методы и подходы к решению одних и тех же задач, в том числе из смежных областей науки Код 32(ПК-3)
	Умеет (способен продемонстрировать): <ul style="list-style-type: none"> – применять разные методы и подходы к решению одних и тех же задач в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления Код У1(ПК-3)
	Владеет: <ul style="list-style-type: none"> – навыками отбора наиболее эффективных методов решения поставленных задач Код В1(ПК-3)

1.4 Согласование междисциплинарных связей дисциплин, практик, научных исследований, обеспечивающих освоение компетенций.

Дисциплина «Выпуклый анализ в задачах оптимизации» логически связана с такими дисциплинами, практиками, научными исследованиями, как:

ПК-1 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, Теория функционально-дифференциальных уравнений, Теория функционально-дифференциальных включений и задачи управления, Теория отображений полуупорядоченных пространств, Многозначный анализ.

ПК-3 – Теория функционально-дифференциальных уравнений, Прикладные методы функционального анализа.

2. Место дисциплины в структуре ОП аспирантуры:

Дисциплина «Выпуклый анализ в задачах оптимизации» является факультативной в учебном плане ОП по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, направленность (профиль) – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Дисциплина «Выпуклый анализ в задачах оптимизации» изучается в 3 семестре.

3. Объём и содержание дисциплины

3.1 Объём дисциплины

Очная форма обучения: 2 з.е.

Заочная форма обучения: 2 з.е.

Вид учебной работы	Очная форма обучения (всего часов)	Заочная форма обучения (всего часов)
Общая трудоёмкость дисциплины	72	72
<i>Контактная работа (по учебным занятиям)</i>	22	4
Лекции (Л)	10	4
Практические (семинарские) занятия (ПЗ)	12	-
Лабораторные занятия (ЛЗ)	-	-
<i>Самостоятельная работа (СР)</i>	50	68
<i>Зачет</i>		

3.2 Содержание курса:

№ те мы	Название раздела/темы	Вид учебной работы, час. (очная/заочная)				Формы текущего контроля
		Л	ПЗ	ЛЗ	СР	
1.	Тема 1. Начала выпуклого анализа	2/-	3/-	-	10/14	Индивидуальные домашние задания
2.	Тема 2. Выпуклые экстремальные задачи	2/1	3/-	-	10/14	Индивидуальные домашние задания
3.	Тема 3. Конечномерная выпуклая геометрия	2/1	2/-	-	10/13	Индивидуальные домашние задания. Контрольная работа
4.	Тема 4. Алгоритмы выпуклой оптимизации	2/1	2/-	-	10/13	Индивидуальные домашние задания
5.	Тема 5. Выпуклый анализ и экстремальные задачи	2/1	2/-	-	10/14	Индивидуальные домашние задания

Тема 1. Начала выпуклого анализа

Лекция. Локально выпуклые пространства и двойственность. Выпуклые множества и функции. Метрика Хаусдорфа. Касательные конусы. Выпуклые полунепрерывные снизу функции. Непрерывность выпуклых функций. Отделимость выпуклых множеств. Отделимость множеств в банаховых пространствах. Теоремы отделимости. Двойственность выпуклых функций. Сопряженные функции. Вычисление выпуклых оболочек множеств и функций. Производные по направлению для выпуклых функций. Субдифференциальное исчисление. Поляра множества.

Практическое занятие.

1. Определение локально выпуклого пространства. Примеры. Определение выпуклого множества. Примеры выпуклых множеств в \mathbb{R}^2 , в функциональных пространствах.
2. Определение выпуклой функции, свойства, надграфик, примеры.
3. Метрика Хаусдорфа. Определение. Примеры нахождения расстояния по Хаусдорфу между множествами в \mathbb{R}^n , в функциональных пространствах. Доказать, что множество выпуклых замкнутых множеств замкнуто в метрике Хаусдорфа. Вывести следствия: а) множество всех выпуклых компактов образует полное метрическое пространство с метрикой Хаусдорфа; б) совокупность всех выпуклых компактных подмножеств заданного выпуклого компакта является метрическим пространством в метрике Хаусдорфа.

4. Выпуклая оболочка множеств. Определить выпуклую оболочку конкретных множеств в \mathbb{R}^n , в функциональных пространствах.
5. Касательные конусы. Определение, свойства, примеры
6. Теоремы отделимости выпуклых множеств. Отделимость в конечномерном пространстве. Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств из \mathbb{R}^2 , которые можно разделить строго, но нельзя сильно. Отделимость в бесконечномерном пространстве.
7. Выпуклые полунепрерывные снизу функции. Непрерывность выпуклых функций. Показать, что любая выпуклая функция, ограниченная на некотором открытом множестве, является непрерывной функцией.
8. Привести пример выпуклой функции, эффективное множество которой есть отрезок в \mathbb{R}^1 , и которая является непрерывной в каждой внутренней точке эффективного множества, но не является липшицевой на всем отрезке.
9. Двойственность выпуклых функций. Сопряженные функции.
10. Производные по направлению для выпуклых функций. Основы субдифференциального исчисления. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Как субдифференциал опорной функции $s(p, A)$ в произвольной точке $p \neq 0$ связан с множеством A ? В каком случае субдифференциал опорной функции является одноточечным множеством во всех точках границы множества?

Задания для самостоятельной работы:

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Выполнение домашних заданий и контрольных работ

Тема 2. Выпуклые экстремальные задачи

Лекция. Условия экстремума. Двойственность выпуклых экстремальных задач. Задача выпуклого программирования. Обобщения выпуклых функций: локально выпуклые функции, слабо и сильно выпуклые функции. Обобщение задачи выпуклого программирования.

Практическое занятие.

1. Задача линейного программирования. Двойственные задачи. необходимое и достаточное условие оптимальности.
2. Сформулировать теорему Экланда.
3. Сформулировать теорему Каристи.
4. Условия экстремума. Двойственность выпуклых экстремальных задач.
5. Задача выпуклого программирования.
6. Обобщения выпуклых функций: локально выпуклые функции, слабо и сильно выпуклые функции.
7. Обобщение задачи выпуклого программирования. Примеры. Основные утверждения.

Задания для самостоятельной работы

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Выполнение домашних заданий и контрольных работ

Тема 3. Конечномерная выпуклая геометрия

Лекция. Жесткость выпуклых многогранников. Теоремы Каратеодори, Радона и Хелли. Теорема Минковского о существовании выпуклого многогранника. Формулы Коши и Штейнера-Минковского. Неравенства Брунна-Минковского. Симметризация Штейнера и теорема Грюнбаума-Хаммера. Симметризация по Брунну-Минковскому.

Практическое занятие.

1. Жесткость выпуклых многогранников. Определение, примеры. Сформулировать теорему Коши о жесткости выпуклых многогранников.
2. Сформулировать теоремы Каратеодори, Радона и Хелли о выпуклых множествах.

3. Сформулировать теорему Минковского о существовании выпуклого многогранника.
4. Формулы Коши и Штейнера-Минковского.
5. Неравенства Брунна-Минковского.
6. Симметризация Штейнера и теорема Грюнбаума-Хаммера.
7. Симметризация по Брунну-Минковскому.
8. Сформулировать теорему Брауэра о неподвижной точке. Сформулировать теорему Шаудера о неподвижной точке. Привести примеры отображений, удовлетворяющих условиям теоремы Шаудера.

Задания для самостоятельной работы

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Выполнение домашних заданий и контрольных работ

Тема 4. Алгоритмы выпуклой оптимизации

Лекция. Метод центрированных сечений. Метод описанных эллипсоидов. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

Практическое занятие.

1. Метод центрированных сечений. Теоретическое обоснование. Алгоритм метода. Простейшие примеры решения задачи выпуклой оптимизации.
2. Метод описанных эллипсоидов. Теоретическое обоснование. Алгоритм метода. Простейшие примеры решения задачи выпуклой оптимизации.
3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Теоретическое обоснование. Алгоритм метода. Простейшие примеры решения задачи линейного программирования.

Задания для самостоятельной работы

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Выполнение домашних заданий и контрольных работ

Тема 5. Выпуклый анализ и экстремальные задачи

Лекция. Принцип Лагранжа для гладко-выпуклых задач. Ляпуновские задачи. Оптимальное восстановление линейных функционалов на классах гладких и аналитических функций. Задачи геометрии. Задачи технического содержания.

Практическое занятие.

1. Вспомогательные сведения. Сформулировать лемму о нетривиальности аннулятора. Сформулировать теорему Банаха об открытом отображении. Сформулировать теорему Банаха об обратном операторе.
2. Элементарные задачи без ограничений.
3. Обоснование принципа Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
4. Класс гладко-выпуклых экстремальных задач. Принцип Лагранжа для гладко-аппроксимативно-выпуклой задачи. Принцип Лагранжа в математическом программировании. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании.
5. Принцип Лагранжа для ляпуновских задач. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа вариационного исчисления.
6. Оптимальное восстановление линейных функционалов на классах гладких и аналитических функций.
7. Прикладные экстремальные задачи: задачи геометрии, задачи техники.

Задания для самостоятельной работы

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Выполнение домашних заданий и контрольных работ

4. Контроль знаний обучающихся

4.1 Формы текущего контроля работы аспирантов

Контрольная работа, индивидуальное домашнее задание.

4.2 Типовые задания текущего контроля

Типовой комплект заданий для контрольных работ

- Доказать, что множество выпуклых замкнутых множеств замкнуто в метрике Хаусдорфа. Вывести следствия: а) множество всех выпуклых компактов образует полное метрическое пространство с метрикой Хаусдорфа; б) совокупность всех выпуклых компактных подмножеств заданного выпуклого компакта является метрическим пространством в метрике Хаусдорфа.
- Показать, что любая выпуклая функция, ограниченная на некотором открытом множестве, является непрерывной функцией.
- Привести пример выпуклой функции, эффективное множество которой есть отрезок в \mathbb{R}^1 , и которая является непрерывной в каждой внутренней точке эффективного множества, но не является липшицевой на всем отрезке.
- Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств из \mathbb{R}^2 , которые можно разделить строго, но нельзя сильно.
- Доказать, что дополнение к открытому шару $B_r(0)$ в гильбертовом пространстве является замкнутым, но не является слабо замкнутым.
- Найти сопряженную функцию f^* для функции:
 - $f(x) = \|x\|, x \in H$;
 - $f(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2}$;
 - $f(x_1, x_2) = 3|x_1| + 4|x_2| + 1$;
 - $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
- Как вычислить опорную функцию объединения двух множеств, зная опорные функции этих множеств?
- Как вычислить опорную функцию пересечения двух выпуклых замкнутых множеств по опорным функциям данных множеств?
- Привести в \mathbb{R}^2 пример функции разрывной в точке, но дифференцируемой по Гато в этой точке.
- Найти субдифференциал функции во всех точках:
 - $f(x_1, x_2) = \max\{|2x_1|, |3x_2|\}$
 - $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{|x_1|^3 + x_2^4}$.
- Найти субдифференциал функции:
 - $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1| + |x_2|; 1, 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ в точке $(0,0)$;
 - $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \max\{|x_1 - 5|; |x_2 + 5|\}$ в точках $(0,0)$ и $(5,-5)$.
- Как перейти от задачи «нахождения условного минимума выпуклой функции на выпуклом замкнутом множестве» к задаче на безусловный минимум некоторой функции по всему пространству?
- В каком случае нормальный конус пересечения выпуклых множеств совпадает с суммой нормальных конусов выпуклых множеств, входящих в пересечение?

Типовые индивидуальные домашние задания

- Показать, что для произвольных замкнутых множеств A и B из банахова пространства E сумма (по Минковскому) этих множеств $A+B$ может оказаться не замкнутым множеством. Доказать, что если одно из этих множеств является компактом, то множество $A+B$ замкнуто. Доказать, что если оба множества A и B компактны, то сумма $A+B$ тоже компакт.

2. Пусть множество A из банахова пространства E выпукло и его внутренность $\text{int } A \neq \emptyset$. Доказать, что множество $\text{int } A$ выпукло и всюду плотно в \bar{A} .
3. Показать, что замкнутость множества A не гарантирует замкнутость множества $\text{co } A$ даже на плоскости \mathbb{R}^2 .
4. Найти опорную функцию: а) отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$; б) n -мерного куба с ребрами длины 2, параллельными осям координат и центром в нуле.
5. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Как субдифференциал опорной функции $s(p, A)$ в произвольной точке $p \neq 0$ связан с множеством A ? В каком случае субдифференциал опорной функции является одноточечным множеством во всех точках границы множества?
6. Пусть в замкнутом и ограниченном множестве из \mathbb{R}^n существует по меньшей мере одна точка, такая, что любая проходящая через нее прямая имеет с данным множеством единственный общий отрезок. Доказать, что все точки, обладающие этим свойством, образуют выпуклое тело.

4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме зачета.

Вопросы зачета

1. Выпуклые множества. Выпуклая оболочка множества и формула для неё. Линейные оболочки.
2. Метрика Хаусдорфа.
3. Теорема Каратеодори. Выпуклая оболочка компакта - компакт.
4. Аффинная оболочка. Аффинная независимость. Барицентрические координаты. Размерность выпуклого множества.
5. n -мерный симплекс в \mathbb{R}^n и непустота его внутренности. Относительная внутренность выпуклого множества и её непустота.
6. Алгебра выпуклых множеств. Элементарные свойства. Строгая отделимость точки от не содержащего её выпуклого замкнутого множества.
7. Отделимость и строгая отделимость выпуклых множеств.
8. Отделимость и теорема Хана-Банаха.
9. Выпуклые функции и их основные свойства (надграфик, эффективное множество и т.д.). Замыкание выпуклых функций.
10. Сопряжённые функции и их свойства. Неравенство Юнга-Фенхеля.
11. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
12. Теорема Фенхеля-Моро.
13. Опорные и индикаторные функции. Их сопряжённые.
14. Лемма Фаркаша.
15. Субдифференциалы выпуклых функций и их свойства. Основные теоремы субдифференциального исчисления.
16. Теорема Моро-Рокафеллара.
17. Теорема Крейна-Мильмана.
18. Поляра множеств.
19. Задача выпуклого программирования.
20. Обобщение выпуклых функций: локально выпуклые функции, слабо и сильно выпуклые функции.
21. Обобщение задачи выпуклого программирования.

Типовые задания для зачета

1. Доказать, что множество выпуклых замкнутых множеств замкнуто в метрике Хаусдорфа.
2. Пусть множество A из банахова пространства E выпукло и его внутренность $\text{int } A \neq \emptyset$. Доказать, что множество $\text{int } A$ выпукло и всюду плотно в \bar{A} .

3. Привести пример замкнутого множества A такого, что множество coA не замкнутое множество.
4. Найти опорную функцию шара на плоскости с центром в точке (a, b) радиуса r .
5. Привести в \mathbb{R}^2 пример функции разрывной в точке, но дифференцируемой по Гато в этой точке.

4.4 Шкала оценивания промежуточной аттестации

Зачет

Оценка	Компетенции	Дескрипторы (уровни) - основные признаки освоения (показатели достижения результата)
«зачтено»	ПК-1	<p>Сформированы, но, возможно содержащие отдельные пробелы, представления о современном состоянии и тенденциях развития теории дифференциальных уравнений и включений, динамических систем и оптимального управления.</p> <p>Сформированы, но, возможно содержащие отдельные пробелы, представления о принципах исследования дифференциальных уравнений и включений, динамических систем и задач оптимального управления.</p> <p>В целом успешное, но, возможно, не систематическое осуществляемое умение применять современные методы решения и исследования дифференциальных уравнений, динамических систем и задач оптимального управления.</p> <p>В целом успешное, но не систематическое владение навыками выбора и использования эффективных методов решения задач различной сложности в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.</p>
	ПК-3	<p>Сформированные, возможно содержащие отдельные пробелы представления об основных разделах смежных дисциплин.</p> <p>Сформированные, возможно содержащие отдельные пробелы представления о разнообразии методов и подходов к решению одних и тех же задач, в том числе из смежных областей науки.</p> <p>В целом успешное, но, возможно, не систематическое осуществляемое умение применять разные методы и подходы к решению одних и тех же задач в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.</p> <p>В целом успешное, но, возможно. не систематическое владение навыками отбора наиболее эффективных методов решения поставленных задач.</p>
«не зачтено»	ПК-1	<p>Отсутствие знаний или фрагментарные представления о современном состоянии и тенденциях развития теории дифференциальных уравнений и оптимального управления или имеются, возможно, неполные представления о современном состоянии и тенденциях развития теории дифференциальных уравнений и оптимального управления.</p> <p>Отсутствие знаний или фрагментарные или неполные</p>

		<p>представления о принципах исследования дифференциальных уравнений и задач оптимального управления.</p> <p>Отсутствие умений или частично освоенное умение применять современные методы решения и исследования дифференциальных уравнений, динамических систем и задач оптимального управления.</p> <p>Отсутствие навыков или фрагментарное владение навыками выбора и использования эффективных методов решения задач различной сложности в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.</p>
	ПК-3	<p>Отсутствие знаний или фрагментарные представления об основных разделах смежных дисциплин или неполные представления об основных разделах смежных дисциплин.</p> <p>Отсутствие знаний или фрагментарные представления о возможном разнообразии методов и подходов к решению одних и тех же задач, в том числе из смежных областей науки или неполные представления о возможном разнообразии методов и подходов к решению одних и тех же задач, в том числе из смежных областей науки.</p> <p>Отсутствие умений или частично освоенное умение применять разные методы и подходы к решению одних и тех же задач в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.</p> <p>Отсутствие навыков или фрагментарное владение навыками отбора наиболее эффективных методов решения поставленных задач.</p>

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

5.1 Основная литература

1. Арутюнов, А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу [Текст] : учеб. пособие / А.В. Арутюнов .— М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014 .— 184 с. — ISBN 978-5-9221-1558-2.
2. Благодатских, В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория) [Текст] : Учебник для вузов / В.И. Благодатских .— М. : Высш. шк., 2001 .— 239 с. — (Высшая математика) .— ISBN 5-06-003983-8 : 64.60.
3. Жуковский, Е.С. Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] : Монография / Е.С. Жуковский ; Тамб. гос. ун-т им.Г.Р.Державина .— Тамбов : Изд-во ТГУ, 2003 .— 148 с. — ISBN 5-89016-078-8 : 40.88.

5.2 Дополнительная литература

1. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-ое изд. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Т.1,2. М.: МЦНМО, 2011.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 2013.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 2008.
5. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2003.

6. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 2007.

5.3 Иные источники

1. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 2011.
2. Рокафеллер Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 2013.
3. Экланд И., Тетам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 2009.
4. Borwein J. M., Lewis A. S. Convex Analysis and Nonlinear Optimization. Springer. Science + Business Media. Inc, 2006.
5. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильновыпуклого анализа. М.: Физматлит. 2004.

6. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: специальные помещения для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещения для самостоятельной работы.

Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа используются наборы демонстрационного оборудования, обеспечивающие тематические иллюстрации (проектор, ноутбук, экран/ интерактивная доска).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Электронная информационно-образовательная среда

<http://moodle.tsutmb.ru>

Взаимодействие преподавателя и аспиранта в процессе освоения дисциплины осуществляется посредством мультимедийных, гипертекстовых, сетевых, телекоммуникационных технологий, используемых в электронной информационно-образовательной среде университета.

Лицензионное программное обеспечение:

Операционная система Microsoft Windows Vista Business Russian
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный Russian Edition. 1500-2499 Node 1 year Educational Renewal Licence
Microsoft Office Профессиональный плюс 2007

Информационные справочные системы и профессиональные базы данных (в том числе международные реферативные базы данных научных изданий):

1. Электронный каталог Фундаментальной библиотеки ТГУ – URL: <http://http://biblio.tsutmb.ru/elektronnyj-katalog/>
2. Электронная библиотека ТГУ – URL: <https://elibrary.tsutmb.ru>
3. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» - URL: <http://www.biblioclub.ru>
4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU - URL: <http://elibrary.ru>
5. Государственная информационная система «Национальная электронная библиотека» - URL: <https://нэб.рф>

6. Президентская библиотека имени Б.Н. Ельцина - URL: <http://www.prlib.ru>
7. Электронный справочник «Информо» - URL: www.informio.ru
8. БД издательства SpringerNature
 - URL: <https://link.springer.com/>
 - URL: <https://materials.springer.com/>
 - URL: <https://zbmath.org/>
 - URL: <https://goo.gl/PdhJdo> - БД Nano
9. БД ScienceDirect - URL: <https://www.sciencedirect.com/>
10. БД Scopus - URL: <http://www.scopus.com>
11. БД Web of Science
 - URL:
WOS_GeneralSearch_input.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&SID=Q1qfWXliB25bAcrIBPM&preferencesSaved
12. Архив научных журналов зарубежных издательств URL: <https://arch.neicon.ru>
13. Словари АБВУ Lingvo x3 Европейская версия – установлены стационарно на ПК ТГУ